

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

**TIEMPO:** 90 minutos.

**Responda a las tres preguntas siguientes (calificación: 2 puntos por pregunta):**

**Pregunta 1.** Dadas las matrices reales  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , se pide:

a) (1 punto) Determinar los valores del parámetro  $a$  para los cuales la matriz  $AB$  tiene inversa.

b) (1 punto) Para  $a = 2$ , resolver el sistema  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Pregunta 2.** Los premios de un puesto en una feria se obtienen al retirar un sobre de entre todos los que hay en una urna. El 60% de los sobres te ofrece una bolsa de dulces, el 20% de los sobres te ofrece una gorra, el 10% te ofrece el balón del Mundial 2026, el 8% te ofrece el peluche de Stich y, por último, el 2% un televisor de 32 pulgadas.

a) (1 punto) Mi pareja abre un sobre y me dice que no es un dulce, ¿qué probabilidad tengo de ganar el peluche de Stich? Y si tampoco es el peluche de Stich, ¿qué probabilidad tengo de ganar un televisor?

b) (1 punto) Tras sacar un sobre y retirar el premio, el sobre se vuelve a incluir en la urna, ¿cuál es la probabilidad que tras probar con tres sobres tenga al menos un peluche de Stich?

**Pregunta 3.** Se pide:

a) (1 punto) Analizar la continuidad y derivabilidad en  $x = 2$  de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

b2) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$$

**Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :**

**Pregunta 4.1.** Dados el plano  $\pi: x - z = 2$  y la recta  $r \equiv (1 + \lambda, 2 + \lambda, 3)$ . Se pide:

- a) (1 punto) Hallar el ángulo que forman el plano y la recta.
- b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de  $P(0, 1, 2)$  respecto al plano  $\pi$ .

**Pregunta 4.2.** Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = -3 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases} .$$

Se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
- b) (1 punto) Hallar la recta perpendicular común, es decir, perpendicular y secante a ambas rectas.

---

**Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :**

**Pregunta 5.1.** Sea  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 1$ . Se pide:

- a) (1 punto) Estudiar los extremos relativos de  $f(x)$ .
- b) (1 punto) Calcular:  $\int_{-2}^2 f(x) dx$ .

**Pregunta 5.2.** Se pide:

- a) (1 punto) Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto  $x = 0$  de la función

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} .$$

- b) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} .$$

## MATEMÁTICAS II

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

**Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.**

---

1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

2.

a) Planteamiento probabilidad: 0.3 puntos. Cálculo correcto: 0.2 puntos. Planteamiento probabilidad: 0.3 puntos. Cálculo correcto: 0.2 puntos.

b) Identificar binomial: 0.3 puntos. Planteamiento probabilidad: 0.4 puntos. Cálculo correcto: 0.3 puntos.

3.

a) Continuidad: 0.5 puntos. Derivabilidad: 0.5 puntos.

b1) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b2) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

4.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos. Se restan 0.2 puntos si no se da el ángulo correcto.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

4.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

5.1.

a) Cálculo de la derivada: 0.3 puntos. Puntos críticos: 0.3 puntos. Caracterización de los puntos críticos: 0.4 puntos.

b) Primitiva: 0.4 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.4 puntos. Resultado correcto: 0.2 puntos.

5.2.

a) Derivada: 0.5 puntos. Evaluación de la función y la derivada: 0.2 puntos. Ecuación de la recta: 0.3 puntos.

b) Derivada: 0.5 puntos. Monotonía: 0.3 puntos. Máximo: 0.2 puntos.

**MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES**  
**(Documento de trabajo orientativo)**

1.

a) Como la matriz  $B$  siempre tiene inversa, la matriz  $AB$  tiene inversa si el determinante de  $A$  es distinto de cero. Puesto que  $\det(A) = -a(3a - 2) = 0$ , la matriz  $A$  tiene inversa si  $a \neq 0$  y  $a \neq 2/3$ .

b) La solución del sistema es  $x = 2$ ,  $y = 0$  y  $z = 3$ .

2.

a) Sea  $S$  el suceso Stich,  $D$  dulce y  $TV$  televisión:

$$P(S|\bar{D}) = \frac{P(S)}{P(\bar{D})} = \frac{0.08}{1 - 0.6} = 0.2 \quad \text{y} \quad P(TV|(\bar{D} \cap \bar{S})) = \frac{P(TV)}{P(\bar{D} \cap \bar{S})} = \frac{0.02}{1 - 0.6 - 0.08} = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

b)  $X \sim B(3, p)$  con  $p = 0.08$ ,  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^3 = 0.2213$ .

3.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 0 = 0 = f(0)$ , por lo tanto  $f(x)$  es continua en  $x = 2$ .  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x = 4 \neq$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 0 = 0$ , por lo tanto  $f(x)$  no es derivable en  $x = 2$ .

b1)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)}{(x + 2)} = \frac{1}{4}.$$

b2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0.$$

4.1.

a) A partir del vector normal del plano y el vector director de la recta se calcula el coseno del ángulo:

$$\cos \theta = \frac{(1, 0, -1) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, forman un ángulo de  $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

b) Se construye la recta perpendicular al plano  $\pi$  por el punto  $P: (x, y, z) = (0, 1, 2) + \mu(1, 0, -1)$ . El punto de corte de dicha recta con el plano se obtiene sustituyendo en la ecuación del plano:

$$\mu - (2 - \mu) = 2 \Leftrightarrow \mu = 2 \Leftrightarrow M(2, 1, 0).$$

Como  $M$  es el punto medio de  $P$  y el punto simétrico  $Q$ :

$$M = \frac{P + Q}{2} \Leftrightarrow Q = 2M - P = (4, 1, -2).$$

## 4.2.

a) Sea  $P_r(1, 2, 3)$ ,  $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ ,  $P_s(-3, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_s = (1, 2, 0)$ . Como los rangos de las matrices

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ P_r P_s \end{pmatrix}$$

son 2 y 3, respectivamente, las rectas se cruzan.

b) Para hallar la recta perpendicular pedida, se construye el vector entre un punto cualquier de  $r$  y otro de  $s$ . Este vector tiene que ser ortogonal a los dos vectores directores de las rectas. De esta manera se determinan los dos puntos que definen la recta perpendicular común:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{X_r X_s} \cdot (1, 1, 0) = 0 \\ \overrightarrow{X_r X_s} \cdot (1, 2, 0) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mu - 3 - \lambda - 1, 2\mu + 1 - \lambda - 2, -3) \cdot (1, 1, 0) = 0 \\ (\mu - 3 - \lambda - 1, 2\mu + 1 - \lambda - 2, -3) \cdot (1, 2, 0) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda = -7, \mu = -3.$$

Por lo tanto la recta perpendicular común está determinada por  $X_r(-6, -5, 3)$  y  $X_s(-6, -5, 0)$ . La ecuación de la recta normal es  $(-6, -5, \lambda)$ .

## 5.1.

a) Calculamos los puntos críticos:  $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 0$ , obteniendo  $x = -5$  y  $x = 1$ . Como  $f'(x) > 0$  en  $(-\infty, -5)$  y en  $(1, \infty)$  y  $f'(x) < 0$  en  $(-5, 1)$ , en  $x = -5$  hay un máximo relativo y en  $x = 1$  hay un mínimo relativo.

b) Calculamos una primitiva  $\int (x^3 + 6x^2 - 15x - 1) dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{15x^2}{2} - x$ . Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 6x^2 - 15x - 1) dx = \left[ \frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{15x^2}{2} - x \right]_{-2}^2 = \left( \frac{16}{4} + 16 - \frac{60}{2} - 2 \right) - \left( \frac{16}{4} - 16 - \frac{60}{2} + 2 \right) = 28.$$

## 5.2.

a) Como

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)(x^2 + 1) - 2x \cos(x)}{(x^2 - 1)^2},$$

se tiene que  $f(0) = 1$  y  $f'(0) = 0$ . La ecuación de la recta tangente en el punto  $(0, f(0)) = (0, 1)$  es  $y = 1$ .

b) El numerador de la derivada

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

se anula en  $x = e$ . La función  $f(x)$  es creciente cuando  $0 < x < e$  y decreciente cuando  $x > e$ . Además, alcanza un máximo en  $(e, \frac{1}{e})$ .